УДК 539.3

НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН НЕОДНОРІДНОЇ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНИ З КРАЄВОЮ ТРІЩИНОЮ

Ю. Боднар, к.т.н.
Львівський національний аграрний університет

Ключові слова: прямокутна пластина, крайова тріщина, неоднорідність, метод R-функцій, метод Рітца, поліноми Чебишева.

Розглядається неоднорідна пружна прямокутна пластина з крайовою тріщиною. Напружено-деформований стан пластини визначається методом R-функцій. Наведені чисельні результати досліджень.

Постановка проблеми. У багатьох роботах при розгляді тіл із тріщинами обмежуються визначенням коефіцієнта інтенсивності напружень. Водночас існують задачі, зокрема при побудові прикладних методів розрахунку армованих елементів будівельних конструкцій, коли корисно мати повну картину напружено-деформованого стану. Тому актуальними є задачі про визначення напружено-деформованого стану в тілах із тріщинами.

Постановка завдання. Завданням статті є дослідження методом R-функцій напружено-деформованого стану неоднорідної пружної прямокутної пластини з крайовою тріщиною при заданих переміщеннях на границі.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо прямокутну пластинку довжиною H та висотою $2d$ з горизонтальною крайовою тріщиною довжиною l на осі симетрії. На гранях, паралельних тріщині, задані нормальні переміщення δ. Силове навантаження на границі пластинки відсутнє. Нехай неоднорідність у напрямі тріщини описується співвідношеннями:

$$E = \frac{2}{k+1} \cdot E_0 \cdot (1 + (k-1) \cdot x^2), \qquad \nu = \nu_0,$$

де k = const − параметр, який визначає неоднорідність матеріалу. Якщо $k = 1$, отримаємо однорідний матеріал з пружними характеристиками E_0, ν_0.

Задача зводиться до граничної на прямокутному елементі Ω, тобто до визначення переміщень $u(x,y), v(x,y)$, які задовольняють рівняння

Ламе та граничні умови

$$u_n(x,y)=\delta,\quad \tau_n(x,y)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_1$$
$$\sigma_n(x,y)=0,\quad \tau_n(x,y)=0,\quad (x,y)\in\partial\Omega_2$$

де $\partial\Omega_1$ – частина границі прямокутного елемента Ω на продовженні тріщини; $\partial\Omega_2$ – решта границі елемента Ω, u_n – переміщення нормальне до $\partial\Omega$, σ_n,τ_n – напруження нормальні і дотичні до границі $\partial\Omega$.

Задачу розв'язуватимемо методом *R*-функцій. Структуру розв'язку поставленої задачі, тобто такі вирази для $u(x,y),v(x,y)$, які визначені всередині області й містять деякі невідомі функції, за довільного вибору яких точно задовольняються граничні умови, беремо у вигляді [1]

$$u=\varphi+\omega\cdot\left[-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\cdot D_1^{(2)}(\varphi)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\cdot D_1(\varphi)+\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(T_1(\varphi)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot T_1^{(2)}(\varphi)\right)\right]+$$
$$\omega\cdot\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\left(D_1(\psi)-D_1^{(2)}(\psi)\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\cdot T_1(\psi)-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\cdot T_1^{(2)}(\psi)\right]$$
$$\mathrm{v}=\psi+\omega\cdot\left[-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\cdot D_1(\psi)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\cdot D_1(\psi)-\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(T_1(\psi)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot T_1^{(2)}(\psi)\right)\right]+$$
$$\omega\cdot\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\left(D_1(\varphi)-D_1^{(2)}(\varphi)\right)-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2\cdot T_1(\varphi)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2\cdot T_1^{(2)}(\varphi)\right];$$

$$D_1=\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial y};\qquad T_1=-\frac{\partial\omega}{\partial y}\cdot\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial\omega}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y};$$

$$D_1^{(2)}=\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\cdot D_1;\qquad T_1^{(2)}=\frac{\omega_1}{\omega_1+\omega_2}\cdot T_1;$$

$$\varphi=c\cdot u_1+\omega_1\cdot\Phi_1;\qquad \psi=v_1+\omega_1\cdot\Phi_2;$$

де Φ_1,Φ_2 – невідомі функції; c – невідомий коефіцієнт; D_1,T_1 – диференційні оператори [2], які на границі рівні похідним з нормалі та з дотичної відповідно.

Для врахування особливостей розв'язку в вершинах тріщин u_1,v_1, будуємо, використовуючи формули склейки [2] і точні розв'язки задачі про тиск штампа на півплощину [3], оскільки за заданої неоднорідності характер розподілу напружень та переміщень в околі вершини тріщини такий самий, як в однорідному тілі [4].

Нормалізовані рівняння границі $\partial\Omega-\omega(x,y)=0$ та її частин $\partial\Omega_i-\omega_i(x,y)=0,(i=1,2)$ будуємо, використовуючи систему *R*-функцій [2].

Тоді

$$\omega = f_2 \wedge_0 f_3 \wedge_0 f_1,; \qquad \omega_1 = \overline{f_2 \wedge_0 f_4} \vee_0 f_1;$$

$$\omega_2 = \omega \vee_0 \left(f_2 \wedge_0 f_4\right),$$

де $f_1 = 0; f_2 = 0; f_3 = 0; f_4 = 0$ – нормалізовані рівняння границь відповідних областей:

$$f_1 = \frac{1}{2d}\left(d^2 - y^2\right);\ f_2 = x;$$
$$f_3 = H - x; \quad f_4 = \left(H - l\right) - x.$$

Невідомі компоненти структури визначаємо методом Рітца [5], представляючи функції Φ_1, Φ_2 у вигляді розкладів за поліномами Чебишева [6] з вибором степенів відповідно симетрії задачі

$$\Phi_1 = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(1)} \cdot \varphi_k^{(1)}, \qquad \Phi_2 = \sum_{k=1}^{n} c_k^{(2)} \cdot \varphi_k^{(2)},$$

$$\varphi_k^{(1)}(x, y) = T_i\left(\frac{x}{H}\right) \cdot T_{2j}\left(\frac{y}{d}\right), \qquad \varphi_k^{(2)}(x, y) = T_i\left(\frac{x}{H}\right) \cdot T_{2j+1}\left(\frac{y}{d}\right),$$

де $T_i\left(t\right)$ – поліноми Чебишева [6].

У результаті мінімізації квадратичного функціоналу

$$I(u, v) = \iint_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2\mu \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} d\Omega$$

отримуємо систему алгебраїчних рівнянь відносно параметрів c_j

$$\sum_{j=1}^{n+m+1} a_{ij} c_j = b_i, \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, n + m + 1\right)$$

де

$$c_j = \begin{cases} c_j^{(1)} & j \le n \\ c_{j-n}^{(2)} & n < j \le n + m + 1 \end{cases}.$$

Коефіцієнти a_{ij}, b_i цієї системи дорівнюють

$$a_{ij} = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} \frac{\partial f_j}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \frac{\partial \psi_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \; +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_j}{\partial x} + \frac{\partial f_j}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \; ;$$

$$b_i = \iint\limits_{\Omega} \left\{ \lambda \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) + 2\mu \left(\frac{\partial u_0}{\partial x} \frac{\partial f_i}{\partial x} + \frac{\partial v_0}{\partial y} \frac{\partial \psi_i}{\partial y} \right) \right\} d\Omega \; +$$

$$+ \iint\limits_{\Omega} \left\{ \mu \left(\frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{\partial u_0}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial x} + \frac{\partial f_i}{\partial y} \right) \right\} d\Omega$$

де

$$f_i = \tilde{\varphi}_i^{(1)} + \omega \left[- \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right] +$$

$$+ \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(T_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right) + \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right) \right] +$$

$$+ \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right) + \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right];$$

$(i \leq n + m)$, $\qquad f_{n+m+1} = \tilde{u}$;

$$\psi_i = \tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} + \omega \left[\frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y} \left(D_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - D_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 T_1 \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) \right] +$$

$$+ \omega \left[\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 T_1^{(2)} \left(\tilde{\varphi}_i^{(1)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) - \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2 D_1 \left(\tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)} \right) \right] -$$

$$-\omega\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(T_1\left(\tilde{\varphi}^{(2)}_{i-n}\right)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}T_1^{(2)}\left(\tilde{\varphi}^{(2)}_{i-n}\right)\right)\right]$$

$$\tilde{\varphi}_i^{(1)}=\omega_1\varphi_i^{(1)}, \qquad \tilde{\varphi}_{i-n}^{(2)}=\omega_1\varphi_{i-n}^{(2)},$$

$$u_0=\omega\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(D_1(\tilde{v})-D_1^{(2)}(\tilde{v})\right)+\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2T_1(\tilde{v})-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2T_1^{(2)}(\tilde{v})\right]$$

$$v_0=\tilde{v}+\omega\left[-\left(\frac{\partial\omega}{\partial x}\right)^2D_1(\tilde{v})-\left(\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)^2D_1(\tilde{v})-\frac{\partial\omega}{\partial x}\frac{\partial\omega}{\partial y}\left(T_1(\tilde{v})+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}T_1^{(2)}(\tilde{v})\right)\right];$$

$$\tilde{u}=\frac{y+d}{2d}u_m\left(x,d-y\right)-\frac{y-d}{2d}u_m(x,d+y) \qquad \tilde{v}=\frac{y+d}{2d}v_m\left(x,d-y\right)+\frac{y-d}{2d}v_m(x,d+y)$$

v_m , v_m − точні розв`язки задачі про тиск штампу на півплощину [3].

Висновки. На основі запропонованої математичної моделі проведено числові розрахунки. Результати розрахунків для $d/H = 1$, $l/H = 0{,}5$, $\lambda = 0{,}57692$, $\mu = 0{,}38465$ наведено на рис. 1, 2.

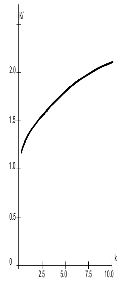

Рис. 1. Коефіцієнт K_1^* за різних k.

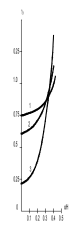

Рис. 2. Напруження на продовженні тріщини.

На рис. 1 наведено графік залежності K_1^* $(K_1^*=2K_1H/(F\sqrt{\pi l})$ від параметра неоднорідності k. На рис. 2 наведено нормальні напруження на продовженні тріщини для різних k: 1-k = 0,1; 2-k = 1,0; 3-k = 10,0.

Бібліографічний список

1. Боднар Ю. І. Наближене розв`язування задач теорії тріщин методом R-функцій / Ю. І. Боднар, М. С. Синєкоп // Доп. АН України. − 1994. − № 4. − С. 45-48.

2. Рвачев В. Л. Метод R-функций в задачах теории упругости и пластичности / В. Л. Рвачев, Н. С. Синекоп. – К. : Наук. думка, 1990. − 216 с.
3. Снеддон И. Н. Преобразования Фурье / И. Н. Снеддон. − М. : ИЛ, 1966. − 667 с.
4. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения / Г. П. Черепанов. − М. : Наука, 1974. − 640 с.
5. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике / С. Г. Михлин. − М. : Наука, 1970. − 512 с.
6. Пашковский С. Вычислительное применение многочленов и рядов Чебышева / С. Пашковский. − М. : Наука, 1983. − 384 с.

Боднар Ю. Напряженно-деформированное состояние неоднородной прямоугольной пластины с краевой трещиной

Рассматривается неоднородная упругая прямоугольная пластина с краевой трещиной. Напряженно-деформированное состояние пластины определяется методом R-функций. Приведены численные результаты исследований.

Ключевые слова: прямоугольная пластина, краевая трещина, неоднородность, метод *R*-функций, метод Ритца, полиномы Чебышева.

Bodnar Ju. Tensely-deformed state of heterogeneous rectangular plate with regional crack

An heterogeneous rectangular plate is examined with a regional crack. The tensely-deformed state of plate is determined the method of P-functions The numeral results of researches are resulted.

Key words: plate, regional crack, method *R*-functions, method Rittsa, polynomials Chebisheva.